2

Παραγώγιση

Αποστρέφομαι με φόβο και φρίκη την αξιοθρήνητη κακία των συναρτήσεων που δεν έχουν παραγώγους.
—Charles Hermite,
σε μια επιστολή προς τον Thomas Jan Stieltjes

Σε αυτό το κεφάλαιο επεκτείνουμε τις βασικές αρχές του διαφορικού λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ξεκινάμε, στην Ενότητα 2.1, με τη γεωμετρία των πραγματικών συναρτήσεων και μελετάμε τα γραφήματα αυτών των συναρτήσεων ως βοηθήματα για την οπτικοποίησή τους. Στην Ενότητα 2.2 παραθέτουμε μερικούς βασικούς ορισμούς που αφορούν τα όρια και τη συνέχεια. Εξετάζουμε αυτό το αντικείμενο συνοπτικά, διότι η πλήρης ανάπτυξή του απαιτεί χρόνο και μαθηματική ωριμότητα· γι' αυτό είναι καλύτερο να γίνει σε κάποιο πιο προχωρημένο μάθημα. Ευτυχώς, για τους σκοπούς μας, δεν απαιτείται η πλήρης κατανόηση όλων των λεπτομερειών της έννοιας του ορίου· αν κάποιος φοιτητής αντιμετωπίσει δυσκολίες με αυτή την ενότητα, ας το έχει κατά νου. Σπεύδουμε όμως να προσθέσουμε ότι η έννοια του ορίου είναι βασική για τον ορισμό της παραγώγου, όχι όμως και για τον υπολογισμό των περισσότερων παραγώγων σε συγκεκριμένα προβλήματα, όπως γνωρίζουμε ήδη από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Στις Ενότητες 2.3 και 2.5 ασχολούμαστε με τον ορισμό της παραγώγου και αποδεικνύουμε μερικούς βασικούς κανόνες του απειροστικού λογισμού: συγκεκριμένα, πώς παραγωγίζουμε το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση. Στην Ενότητα 2.6 μελετάμε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους και τα εφαπτόμενα επίπεδα, συσχετίζοντάς τα με τα περιεχόμενα της Ενότητας 2.1. Τέλος, στο διαδικτυακό συμπλήρωμα παρατίθενται μερικές από τις τεχνικές αποδείξεις.

Τη γενίκευση του απειροστικού λογισμού από τη μία στις πολλές διαστάσεις πολλές φορές διευκολύνει η χρήση της γλώσσας της άλγεβρας πινάκων. Στην Ενότητα 1.5 συνοψίζονται όλα όσα θα χρειαστούμε.

2.1 Η γεωμετρία των πραγματικών συναρτήσεων

Ξεκινάμε τη μελέτη των πραγματικών συναρτήσεων αναπτύσσοντας κάποιες μεθόδους οπτικοποίησής τους. Συγκεκριμένα, εισάγουμε τις έννοιες του γραφήματος, της καμπύλης στάθμης και της επιφάνειας στάθμης αυτών των συναρτήσεων.

Συναρτήσεις και απεικονίσεις

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και σύνολο τιμών που περιέχεται στον $\mathbb{R}^m$. Με αυτό εννοούμε ότι, σε κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$, η f αντιστοιχίζει μια τιμή $f(\mathbf{x})$, μια m-άδα του $\mathbb{R}^m$. Αυτού του είδους οι συναρτήσεις f ονομάζονται

διανυσματικές συναρτήσεις[1] αν $m > 1$ και ***βαθμωτές συναρτήσεις*** αν $m = 1$. Για παράδειγμα, η βαθμωτή συνάρτηση $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ απεικονίζει το σύνολο A των $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ του $\mathbb{R}^3$ (στη συγκεκριμένη περίπτωση, $n = 3$) στον $\mathbb{R}$ ($m = 1$). Μερικές φορές συμβολίζουμε την f γράφοντας

$$f\colon (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

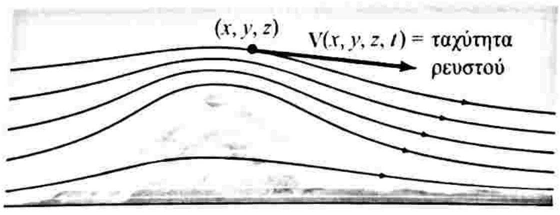
Προσέξτε ότι στον $\mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό (x, y, z) αντί για (x_1, x_2, x_3). Γενικά, ο συμβολισμός $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ είναι χρήσιμος για να δηλώνουμε την τιμή στην οποία απεικονίζεται ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Γράφουμε $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ για να δηλώσουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το A (ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$) και το σύνολο τιμών της περιέχεται στον $\mathbb{R}^m$. Χρησιμοποιούμε επίσης την έκφραση «η f απεικονίζει το A στον $\mathbb{R}^m$». Αυτού του είδους οι συναρτήσεις f ονομάζονται ***συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*** αν $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η διανυσματική συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τον κανόνα

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \sqrt{x_1^2 + x_6^2}\right).$$

Η πρώτη συντεταγμένη της τιμής της g στο σημείο $\mathbf{x}$ είναι το γινόμενο των συντεταγμένων του $\mathbf{x}$.

Οι συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ δεν αποτελούν απλώς αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα, αλλά προκύπτουν φυσιολογικά σε προβλήματα που μελετούνται από όλες τις επιστήμες. Για παράδειγμα, για να περιγράψουμε τη θερμοκρασία T σε μια περιοχή A του χώρου χρειαζόμαστε μια συνάρτηση $T\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($n = 3$, $m = 1$)· επομένως, $T(x, y, z)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο (x, y, z). Για να περιγράψουμε την ταχύτητα ενός ρευστού που κινείται στον χώρο χρειαζόμαστε μια απεικόνιση $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, όπου $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας του ρευστού στο σημείο (x, y, z) του χώρου τη χρονική στιγμή t (βλ. Σχήμα 2.1.1). Για να περιγράψουμε τον ρυθμό της αντίδρασης σε ένα διάλυμα αποτελούμενο από έξι αντιδρώσες χημικές ουσίες A, B, C, D, E, F σε αναλογία x, y, z, w, u, v, χρειαζόμαστε μια απεικόνιση $\sigma\colon U \subset \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, όπου $\sigma(x, y, z, w, u, v)$ είναι ο ρυθμός όταν οι χημικές ουσίες έχουν τη δεδομένη αναλογία.



Σχήμα 2.1.1 Ένα κινούμενο ρευστό ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο **V**, το οποίο περιγράφει την ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού σε κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου.

Για να περιγράψουμε το καρδιακό διάνυσμα (το διάνυσμα που δίνει το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού ρεύματος στην καρδιά) τη χρονική στιγμή t χρειαζόμαστε μια απεικόνιση $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{c}(t)$.

Όταν $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, λέμε ότι η f είναι μια ***πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το U***. Ο λόγος που λέμε «n μεταβλητών» είναι απλώς επειδή θε-

[1] Μερικοί μαθηματικοί θα έγραφαν μια τέτοια f με έντονα στοιχεία, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, διότι η συνάρτηση είναι διανυσματική. Σε αυτό το βιβλίο δεν γίνεται κάτι τέτοιο, λόγω προσωπικής προτίμησης των συγγραφέων. Χρησιμοποιούμε έντονα στοιχεία κυρίως για απεικονίσεις που είναι διανυσματικά πεδία, τα οποία θα εισαχθούν αργότερα. Η έννοια της συνάρτησης αναπτυσσόταν επί πολλούς αιώνες, με τον ορισμό να επεκτείνεται ώστε να καλύπτει νέες περιπτώσεις καθώς αυτές εμφανίζονταν. Για παράδειγμα, το 1667 ο James Gregory όρισε μια συνάρτηση ως «μια ποσότητα που προκύπτει από άλλες ποσότητες μέσω μιας διαδοχής αλγεβρικών πράξεων ή οποιασδήποτε άλλης πράξης θα μπορούσε να φανταστεί κανείς». Το 1755, ο Euler έδωσε τον εξής ορισμό: «Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από κάποιες άλλες κατά τρόπο ώστε να υφίστανται μεταβολή όταν μεταβάλλονται οι δεύτερες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των δεύτερων».

ωρούμε τις συντεταγμένες ενός σημείου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ως n μεταβλητές και η $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ εξαρτάται από αυτές τις μεταβλητές. Λέμε «πραγματική» διότι το $f(x_1, \dots, x_n)$ είναι πραγματικός αριθμός. Επειδή στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αρκετά με πραγματικές συναρτήσεις, θα τις προσέξουμε ιδιαίτερα.

Γραφήματα συναρτήσεων

Αν $f\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n = 1$), το ***γράφημα*** της f είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, f(x))$ του επιπέδου, όπου το x ανήκει στο U. Μπορούμε να φανταστούμε αυτό το υποσύνολο σαν μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$. Με σύμβολα, αυτό γράφεται ως εξής:

$$\text{γράφημα } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U\},$$

όπου τα άγκιστρα σημαίνουν «το σύνολο όλων» και η κατακόρυφη γραμμή διαβάζεται «τέτοιων ώστε». Η σχεδίαση του γραφήματος μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής μάς βοηθάει να έχουμε μια οπτική εικόνα του τρόπου με τον οποίο συμπεριφέρεται η συνάρτηση (βλ. Σχήμα 2.1.2). Είναι χρήσιμο να γενικεύσουμε την έννοια του γραφήματος στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, πράγμα που γίνεται μέσω του ακόλουθου ορισμού:

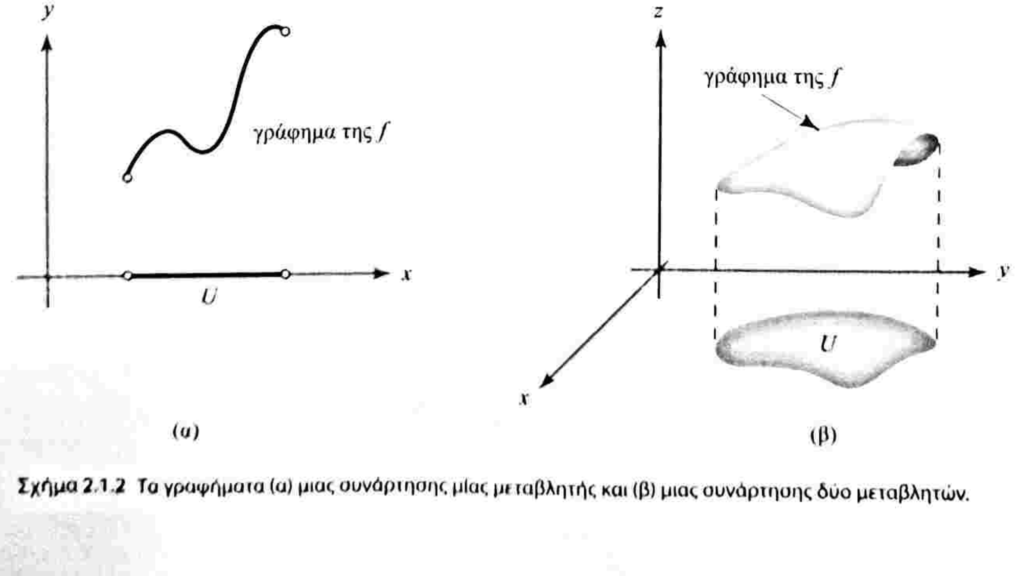
Ορισμός Γράφημα συνάρτησης Έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε το ***γράφημα*** της f ως το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που αποτελείται από όλα τα σημεία

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

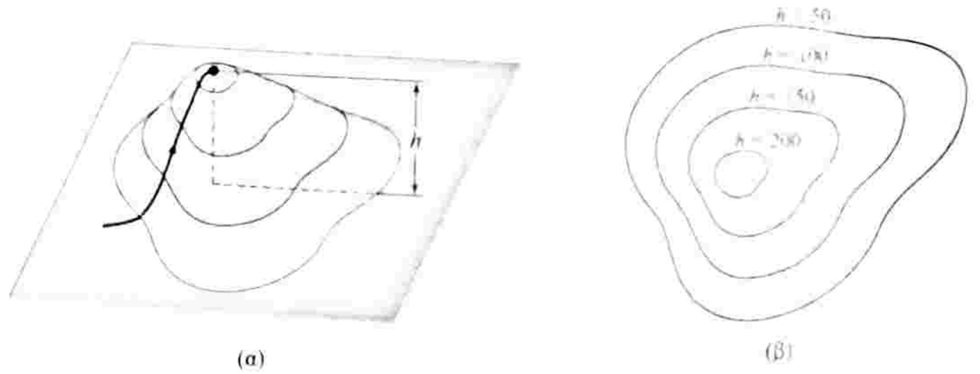
του $\mathbb{R}^{n+1}$, όπου το $(x_1, \dots, x_n)$ ανήκει στο U. Με σύμβολα,

$$\text{γράφημα } f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in U\}.$$

Αν $n = 1$ το γράφημα είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, ενώ αν $n = 2$ είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ (βλ. Σχήμα 2.1.2). Για $n = 3$, είναι δύσκολο να οπτικοποιήσουμε το γράφημα, διότι, δεδομένου ότι είμαστε άνθρωποι που ζούμε σε έναν τριδιάστατο κόσμο, μας είναι δύσκολο να φανταστούμε σύνολα στον $\mathbb{R}^4$. Για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο, εισάγουμε την έννοια του συνόλου στάθμης.



Σχήμα 2.1.2 Τα γραφήματα (α) μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής και (β) μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών.



Σχήμα 2.1.3 Οι ισοϋψείς καμπύλες μιας συνάρτησης ορίζονται όπως οι ισοϋψείς καμπύλες στους τοπογραφικούς χάρτες.

Σύνολα στάθμης, καμπύλες και επιφάνειες

Ας υποθέσουμε ότι $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Ένα ***σύνολο στάθμης*** της f είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ στο οποίο η f είναι σταθερή. Για παράδειγμα, το σύνολο όπου $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ είναι ένα σύνολο στάθμης της f. Αυτό μπορούμε να το οπτικοποιήσουμε: Είναι απλώς μια σφαίρα ακτίνας 1 στον $\mathbb{R}^3$. Τυπικά, ένα σύνολο στάθμης είναι το σύνολο των (x, y, z) για τα οποία $f(x, y, z) = c$, όπου c σταθερά. Η συμπεριφορά ή η δομή μιας συνάρτησης καθορίζεται εν μέρει από το σχήμα των συνόλων στάθμης της. Συνεπώς, η κατανόηση των συνόλων στάθμης μιας συνάρτησης μάς βοηθάει να κατανοήσουμε τη συγκεκριμένη συνάρτηση. Τα σύνολα στάθμης μάς βοηθούν επίσης να κατανοούμε συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f(x, y)$, και σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για ***καμπύλες στάθμης*** ή ***ισοϋψείς καμπύλες***.

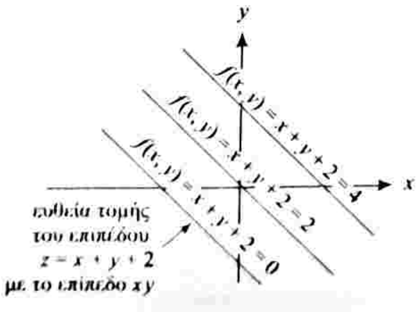
Η ιδέα είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε για την κατασκευή υψομετρικών χαρτών, όπου σχεδιάζουμε γραμμές για να αναπαριστούμε σταθερά υψόμετρα. Ένας περίπατος κατά μήκος μιας τέτοιας γραμμής θα σήμαινε έναν περίπατο κατά μήκος μιας επίπεδης διαδρομής. Στην περίπτωση ενός λόφου που υψώνεται πάνω από το επίπεδο xy, ένα γράφημα όλων των καμπυλών στάθμης μάς δίνει μια καλή εικόνα της συνάρτησης $h(x, y)$, η οποία αναπαριστά το ύψος του λόφου στο σημείο (x, y) (βλ. Σχήμα 2.1.3).

Παράδειγμα 1 Το γράφημα της σταθερής συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2$ —δηλαδή της συνάρτησης $f(x, y) = 2$— είναι το οριζόντιο επίπεδο $z = 2$ στον $\mathbb{R}^3$. Η καμπύλη στάθμης με τιμή c είναι κενή αν $c \neq 2$, ενώ είναι ολόκληρο το επίπεδο xy αν $c = 2$. ▲

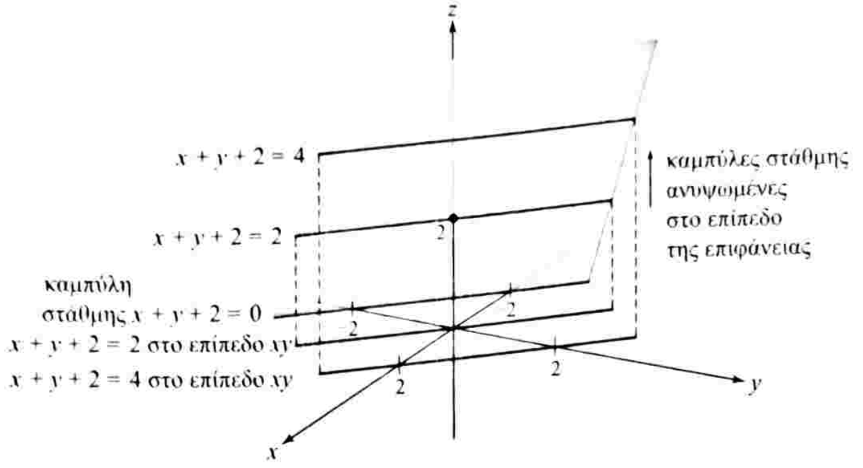
Παράδειγμα 2 Το γράφημα της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x, y) = x + y + 2$ είναι το κεκλιμένο επίπεδο $z = x + y + 2$. Αυτό το επίπεδο τέμνει το επίπεδο xy $(z = 0)$ κατά την ευθεία $y = -x - 2$ και τον άξονα z στο σημείο $(0, 0, 2)$. Για οποιαδήποτε τιμή $c \in \mathbb{R}$, η καμπύλη στάθμης με τιμή c είναι η ευθεία $y = -x + (c - 2)\cdot$ με σύμβολα, είναι το σύνολο

$$L_c = \{(x, y) \mid y = -x + (c - 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Στο Σχήμα 2.1.4. παρουσιάζονται μερικές από τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης. Πρόκειται για έναν υψομετρικό χάρτη της συνάρτησης f.



Σχήμα 2.1.4 Οι καμπύλες στάθμης της $f(x, y) = x + y + 2$ δείχνουν τα σύνολα επί των οποίων η f έχει μια δεδομένη τιμή.



Σχήμα 2.1.5 Η σχέση των καμπυλών στάθμης του Σχήματος 2.1.4 με το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = x + y + 2$, που είναι το επίπεδο $z = x + y + 2$.

Από τις καμπύλες στάθμης με επιγραφή την τιμή ή το «ύψος» της συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε το σχήμα του γραφήματος ανυψώνοντας νοερά κάθε καμπύλη στάθμης ώς το κατάλληλο ύψος, χωρίς να την τεντώσουμε, να τη γείρουμε ή να την ολισθήσουμε. Αν οπτικοποιήσουμε με αυτό τον τρόπο όλες τις καμπύλες στάθμης L_c —δηλαδή για κάθε τιμή $c \in \mathbb{R}$— αυτές θα ενωθούν μεταξύ τους δίνοντάς μας ολόκληρο το γράφημα της f, όπως στην περίπτωση του σκιασμένου επιπέδου του Σχήματος 2.1.5. Αν οπτικοποιήσουμε το γράφημα χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος καμπυλών στάθμης, θα προκύψει ένα υψομετρικό μοντέλο. Αν η συνάρτηση f είναι ομαλή, το γράφημά της θα είναι μια ομαλή επιφάνεια, οπότε το υψομετρικό της μοντέλο, νοερά επεκτεταμένο με ομαλό τρόπο, μας δίνει μια καλή εικόνα του γραφήματος. ▲

Ορισμός Καμπύλες στάθμης και επιφάνειες Έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Το ***σύνολο στάθμης με τιμή*** c ορίζεται ως το σύνολο εκείνων των σημείων $\mathbf{x} \in U$ για τα οποία $f(\mathbf{x}) = c$. Αν $n = 2$ μιλάμε για ***καμπύλη στάθμης*** (με τιμή c), ενώ αν $n = 3$ μιλάμε για ***επιφάνεια στάθμης***. Με σύμβολα, το σύνολο στάθμης με τιμή c γράφεται

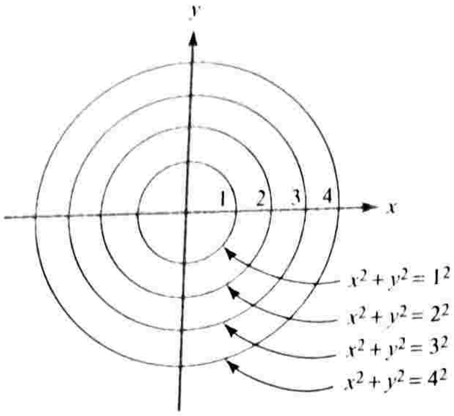
$$\{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Προσέξτε ότι το σύνολο στάθμης ανήκει πάντα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

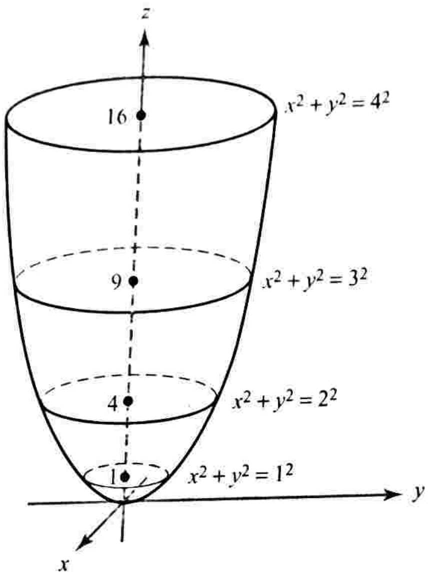
Παράδειγμα 3 Περιγράψτε το γράφημα της τετραγωνικής συνάρτησης

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Λύση Το γράφημα είναι το ***παραβολοειδές εκ περιστροφής*** $z = x^2 + y^2$, με προσανατολισμό από την αρχή των αξόνων προς τα πάνω, περί τον άξονα z. Η καμπύλη στάθμης με τιμή c είναι κενή για $c < 0$, ενώ για $c > 0$ η καμπύλη στάθμης με τιμή c είναι το σύνολο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c\}$, δηλαδή ένας κύκλος ακτίνας $\sqrt{c}$ με κέντρο την αρχή των αξόνων. Επομένως, ανυψωμένο σε ύψος c πάνω από το επίπεδο xy, το σύνολο στάθμης είναι ένας κύκλος ακτίνας $\sqrt{c}$, πράγμα που υποδηλώνει παραβολικό σχήμα (βλ. Σχήματα 2.1.6 και 2.1.7).



Σχήμα 2.1.6 Μερικές καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Σχήμα 2.1.7 Οι καμπύλες στάθμης του Σχήματος 2.1.6 ανυψωμένες στο ύψος του γραφήματος.

▲

Η μέθοδος των τομών

Λέγοντας ***τομή*** του γραφήματος της f εννοούμε την τομή του γραφήματος με ένα (κατακόρυφο) επίπεδο. Για παράδειγμα, αν P_1 είναι το επίπεδο xz του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την $y = 0$, τότε η τομή της f του Παραδείγματος 3 είναι το σύνολο

$$P_1 \cap \text{γράφημα } f = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\},$$

το οποίο είναι μια παραβολή στο επίπεδο xz. Με αντίστοιχο τρόπο, αν P_2 είναι το επίπεδο yz, που ορίζεται από την $x = 0$, τότε η τομή

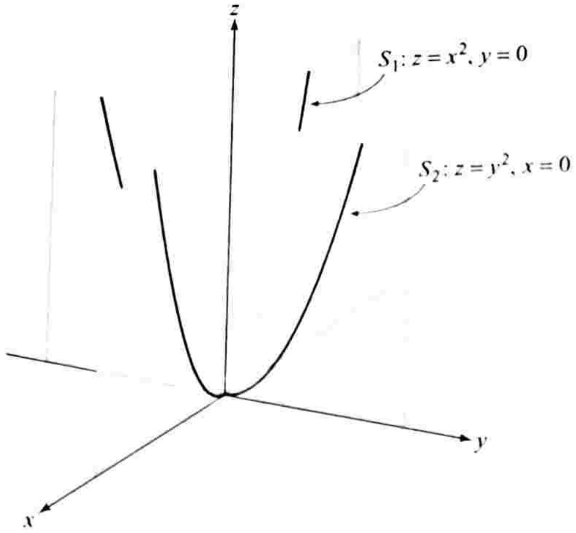
$$P_2 \cap \text{γράφημα } f = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = y^2\}$$

είναι μια *παραβολή* στο επίπεδο yz (βλ. Σχήμα 2.1.8). Συνήθως είναι χρήσιμο να υπολογίζουμε τουλάχιστον μία τομή ως συμπλήρωμα της πληροφορίας που μας δίνουν τα σύνολα στάθμης.

Παράδειγμα 4 Το γράφημα της τετραγωνικής συνάρτησης

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

καλείται ***υπερβολικό παραβολοειδές***, ή ***σάγμα***, με κέντρο την αρχή των αξόνων. Σχεδιάστε το γράφημα.



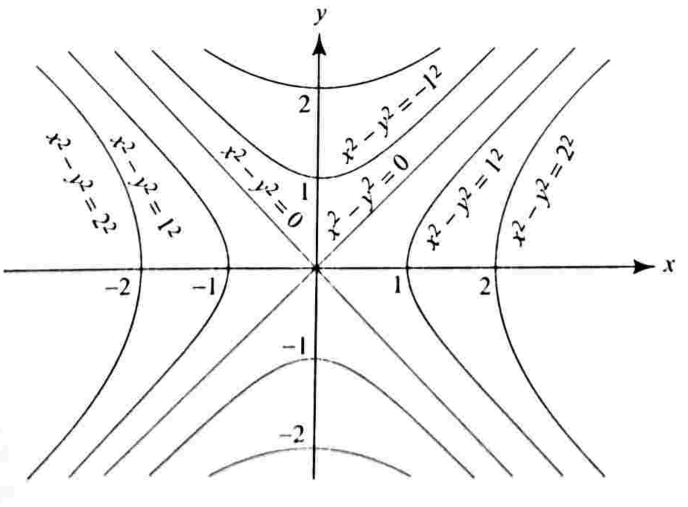
Σχήμα 2.1.8 Δύο τομές του γραφήματος της $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Λύση Για να οπτικοποιήσουμε αυτή την επιφάνεια, σχεδιάζουμε αρχικά τις καμπύλες στάθμης. Για να προσδιορίσουμε τις καμπύλες στάθμης, λύνουμε την εξίσωση $x^2 - y^2 = c$. Ας θεωρήσουμε τις τιμές $c = 0, \pm 1, \pm 4$. Για $c = 0$, έχουμε $y^2 = x^2$ ή $y = \pm x$, άρα το σύνολο στάθμης αποτελείται από δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για $c = 1$, η καμπύλη στάθμης είναι η $x^2 - y^2 = 1$ ή $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, που είναι μια υπερβολή που τέμνει κατακόρυφα τον άξονα x στα σημεία $(\pm 1, 0)$ (βλ. Σχήμα 2.1.9). Με αντίστοιχο τρόπο, για $c = 4$, η καμπύλη στάθμης ορίζεται από την $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, την υπερβολή που τέμνει κατακόρυφα τον άξονα x στα $(\pm 2, 0)$. Για $c = -1$, παίρνουμε την καμπύλη $x^2 - y^2 = -1$ —δηλαδή $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$— την υπερβολή που τέμνει οριζόντια τον άξονα y στο $(0, \pm 1)$. Και για $c = -4$, παίρνουμε την υπερβολή που διέρχεται από τα $(0, \pm 2)$. Αυτές οι καμπύλες στάθμης παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.1.9. Επειδή δεν είναι εύκολο να οπτικοποιήσουμε το γράφημα της f μόνο από αυτά τα δεδομένα, θα υπολογίσουμε και δύο τομές, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Για την τομή με το επίπεδο xz, έχουμε

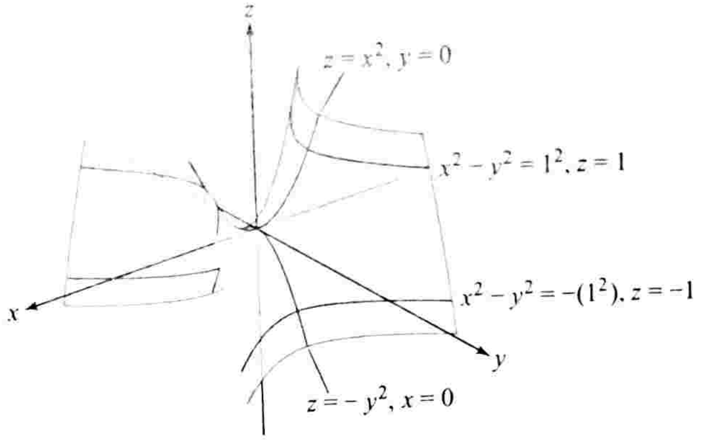
$$P_1 \cap \text{γράφημα } f = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\},$$

που είναι μια παραβολή που ανοίγει προς τα πάνω. Για το επίπεδο yz,

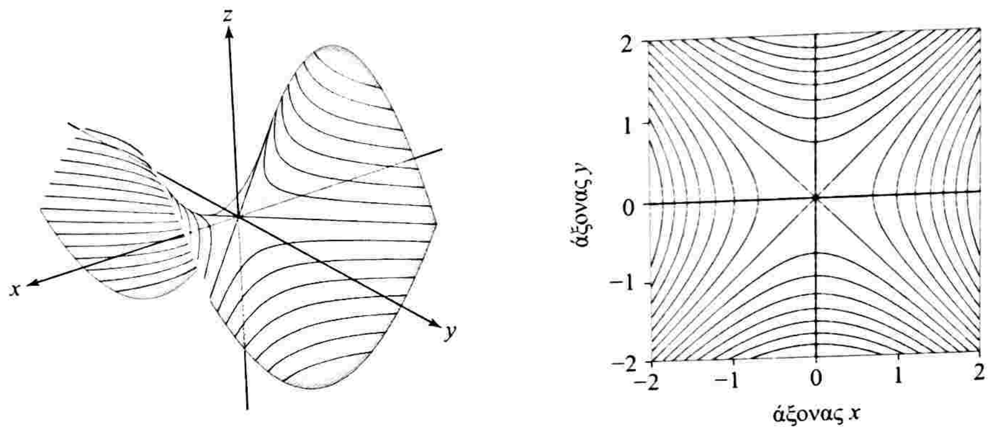
$$P_2 \cap \text{γράφημα } f = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = -y^2\},$$



Σχήμα 2.1.9 Καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Σχήμα 2.1.10 Μερικές καμπύλες στάθμης πάνω στο γράφημα της $f(x, y) = x^2 - y^2$.



Σχήμα 2.1.11 Το γράφημα της $z = x^2 - y^2$ και οι καμπύλες στάθμης του.

που είναι μια παραβολή που ανοίγει προς τα κάτω. Μπορούμε πλέον να οπτικοποιήσουμε το γράφημα ανυψώνοντας τις καμπύλες στάθμης στα κατάλληλα ύψη και εξομαλύνοντας την επιφάνεια που προκύπτει. Στην τοποθέτησή τους μας διευκολύνει ο υπολογισμός των παραβολικών τομών. Με αυτή τη διαδικασία προκύπτει το υπερβολικό σάγμα του Σχήματος 2.1.10. Συγκρίνετέ το με τα γραφήματα των Σχημάτων 2.1.11 που έχουν παραχθεί από υπολογιστή (προσέξτε την αλλαγή στον προσανατολισμό των αξόνων). ▲

Παράδειγμα 5 Περιγράψτε τα σύνολα στάθμης της συνάρτησης

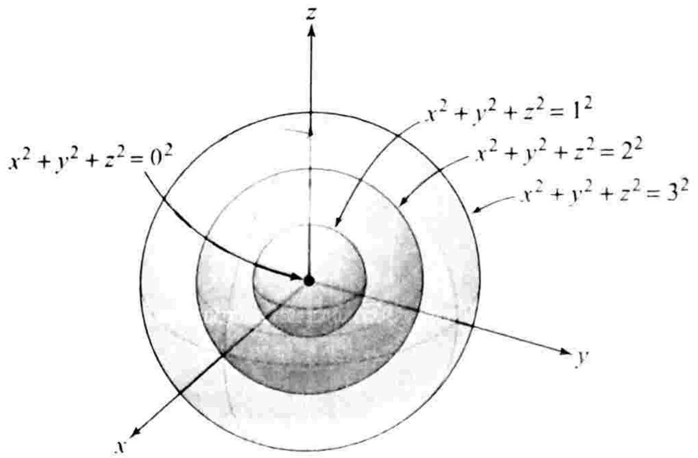
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Λύση Πρόκειται για το τριδιάστατο ανάλογο του Παραδείγματος 3. Σε αυτή την περίπτωση τα σύνολα στάθμης είναι επιφάνειες στον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$. Το γράφημα, στον $\mathbb{R}^4$, δεν μπορεί να οπτικοποιηθεί απευθείας, μπορούμε όμως να υπολογίσουμε τομές.

Το σύνολο στάθμης με τιμή c είναι το σύνολο

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$

που είναι η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{c}$ για $c > 0$, ένα σημείο στην αρχή των αξόνων για $c = 0$, και κενό για $c < 0$. Τα σύνολα στάθμης για $c = 0, 1, 4$ και 9 παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.1.12.



Σχήμα 2.1.12 Μερικές επιφάνειες στάθμης της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Παράδειγμα 6 Περιγράψτε το γράφημα της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Πρόκειται για το τριδιάστατο ανάλογο του Παραδείγματος 4 και καλείται επίσης ***σάγμα***.

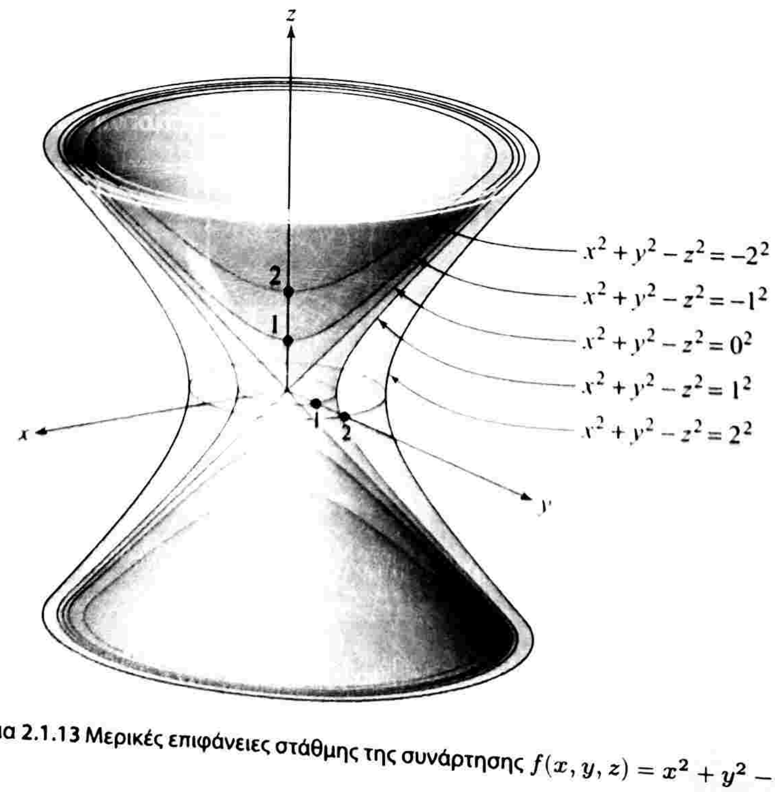
Λύση Τυπικά, το γράφημα της f είναι ένα υποσύνολο του τετραδιάστατου χώρου. Αν συμβολίσουμε τα σημεία αυτού του χώρου με (x, y, z, t), τότε το γράφημα είναι το

$$\{(x, y, z, t) \mid t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

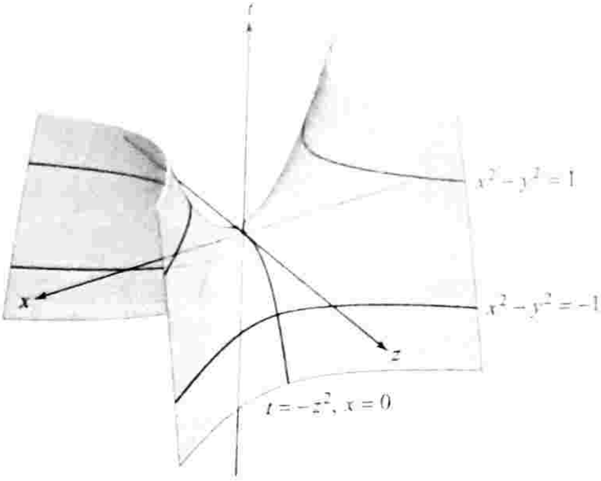
Οι επιφάνειες στάθμης της f ορίζονται από την

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Για $c = 0$, παίρνουμε τον κώνο $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ με άξονα τον άξονα z. Για αρνητικό c, φερ' ειπείν για $c = -a^2$, παίρνουμε $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$, το οποίο είναι ένα δίχωνο υπερβολοειδές περί τον άξονα z που τέμνει τον άξονα z στα σημεία $(0, 0, \pm a)$. Για c θετικό, φερ' ειπείν για $c = b^2$, η επιφάνεια στάθμης είναι ένα ***μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής*** περί τον άξονα z, το οποίο ορίζεται από την $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$ και τέμνει το επίπεδο xy κατά τον κύκλο ακτίνας $|b|$. Αυτές οι επιφάνειες στάθμης έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 2.1.13.



Σχήμα 2.1.13 Μερικές επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

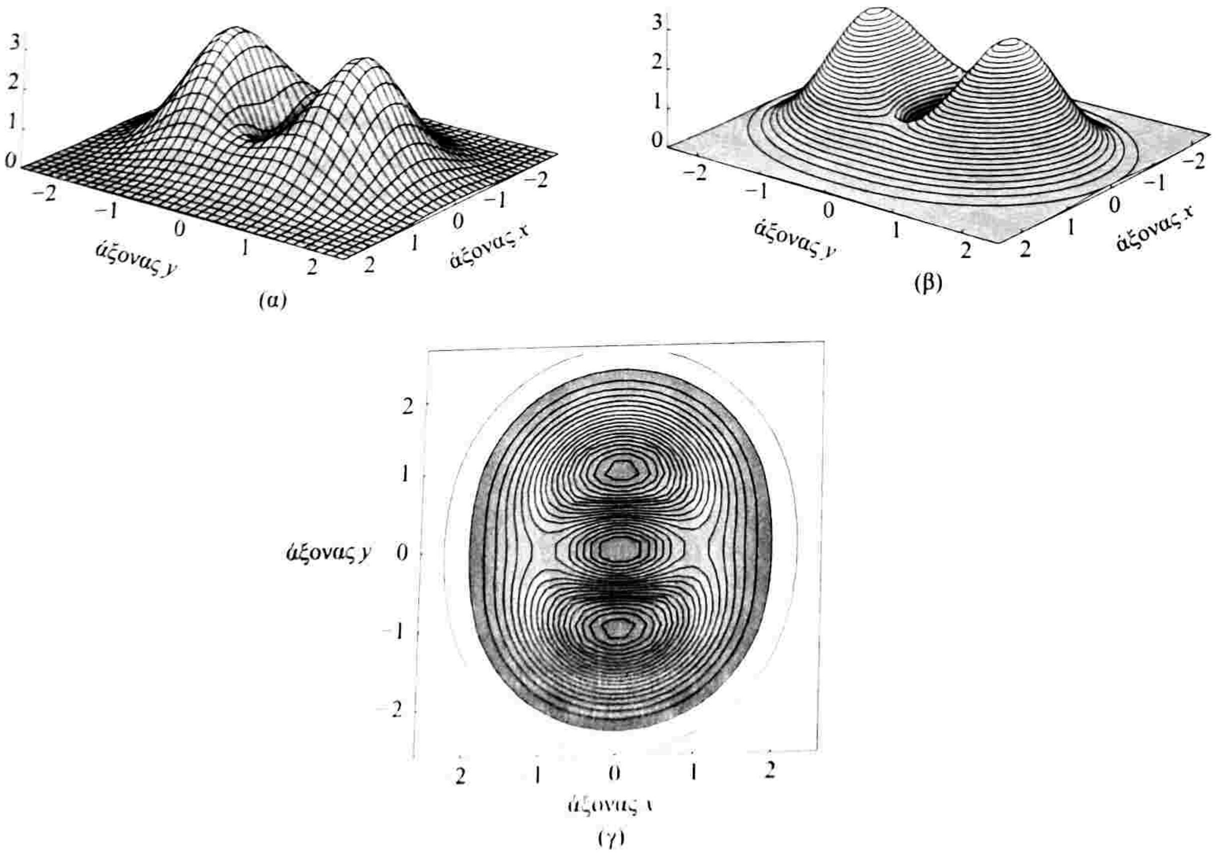


Σχήμα 2.1.14 Η τομή $y = 0$ του γραφήματος της $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Μια άλλη εικόνα του γραφήματος μπορούμε να πάρουμε μέσω μιας τομής. Για παράδειγμα, η τομή του υποχώρου $S_{y=0} = \{(x, y, z, t) \mid y = 0\}$ με το γράφημα είναι το

$$S_{y=0} \cap \text{γράφημα } f = \{(x, y, z, t) \mid y = 0, t = x^2 - z^2\},$$

δηλαδή το σύνολο των σημείων της μορφής $(x, 0, z, x^2 - z^2)$, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί πως είναι μια επιφάνεια στον χώρο xzt (βλ. Σχήμα 2.1.14). ▲



Σχήμα 2.1.15 Τρεις τρόποι αναπαράστασης του γραφήματος της $z = (x^2 + 3y^2)\exp(1 - x^2 - y^2)$ κατασκευασμένοι από υπολογιστή: (α) με τομές, (β) με καμπύλες στάθμης επάνω στο γράφημα και (γ) με καμπύλες στάθμης στο επίπεδο xy.

Είδαμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους των τομών και των συνόλων στάθμης για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης και του γραφήματός της. Οι τεχνικές αυτές είναι πολύ χρήσιμες σε όσους χρειάζονται περιεκτικές οπτικοποιήσεις πολύπλοκων δεδομένων. Υπάρχουν πολλά προγράμματα υπολογιστή που παράγουν τέτοιες οπτικοποιήσεις. Στο Σχήμα 2.1.15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ενός τέτοιου προγράμματος.

Ασκήσεις

1. Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι διανυσματικές ή βαθμωτές;

(α) $f(x, y, z) = e^x z^x \sin y$

(β) $g(x, y) = (x^2y^2, 2x - 1)$

(γ) $h(t) = (\cos t, \sin t, t^2, t^3)$

2. Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι διανυσματικές ή βαθμωτές;

(α) $f(u, v, w) = (u^2v, we^u, 5v)$

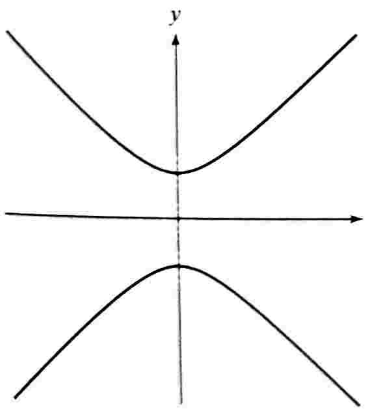
(β) $g(x) = \log\sqrt{x}$

(γ) $h(x, y) = x^5y^{-3}$

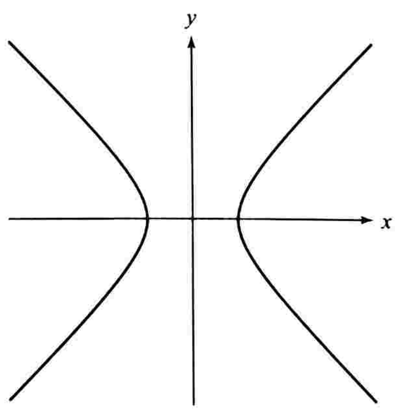
Στις παρακάτω δύο ασκήσεις, αντιστοιχίστε τις δεδομένες καμπύλες στάθμης με τις οπτικές αναπαραστάσεις τους.

3. (α) $f(x, y) = x^2 - y^2 = c, \quad c = 0, 1, -1$

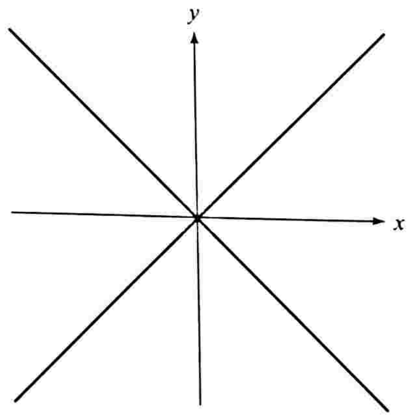
(β) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 = c, \quad c = 6, 12$



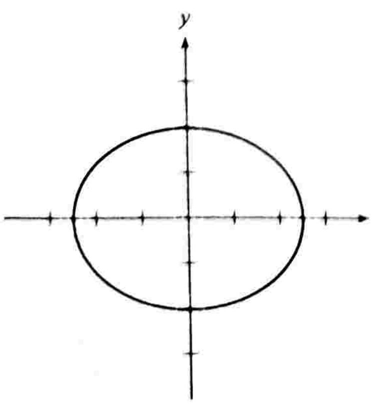
(i)



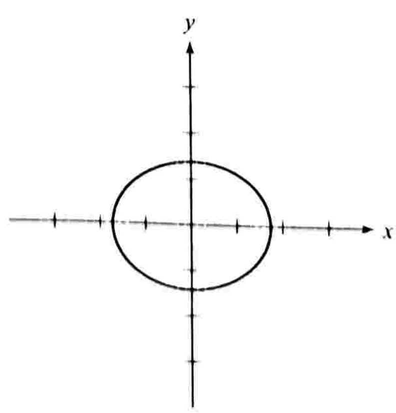
(ii)



(iii)

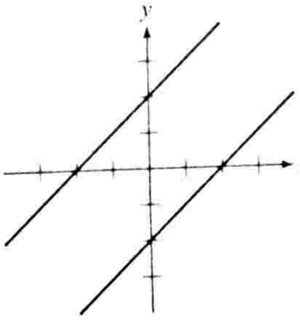


(iv)

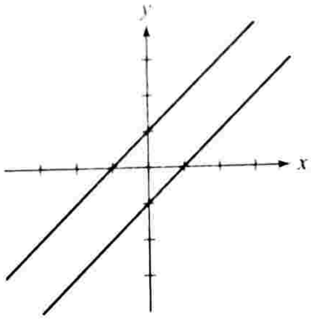


(v)

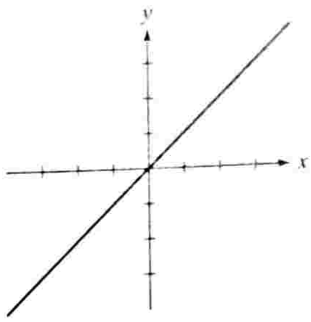
4. (α) $f(x,y) = (x-y)^2 = c, \quad c = 0, 1, 4$ (β) $f(x,y) = (x+y)^2 = c, \quad c = 0, 1, 4$



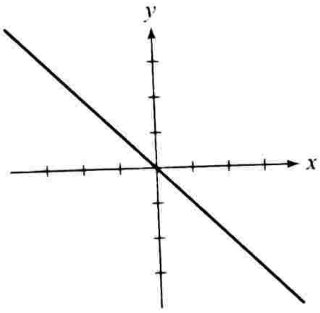
(i)



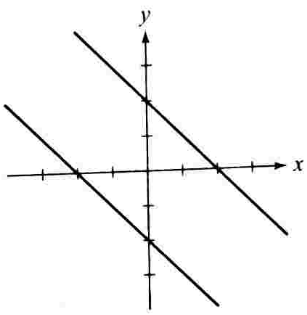
(ii)



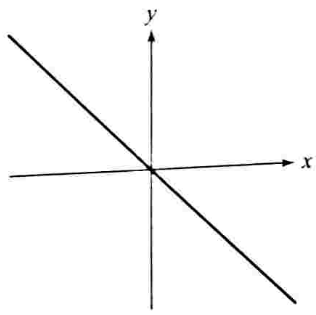
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

5. Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης της f με τιμή c.

(α) $f(x,y) = x^3 - y, c = -1, 0, 1$

(β) $f(x,y) = y - 2\log x, c = -3, 0, 3$

(γ) $f(x,y) = y \csc x, c = 0, 1, 2$

(δ) $f(x,y) = x/(x^2+y^2), c = -2, 0, 4$

6. Έστω $f(x,y) = 9x^2 + y^2$. Σχεδιάστε:

(α) Τις καμπύλες στάθμης της f με τιμή $c = 0, 1, 9$

(β) Τις τομές του γραφήματος της f με τα επίπεδα $x = -1, x = 0, x = 1$

(γ) Τις τομές του γραφήματος της f με τα επίπεδα $y = -1, y = 0, y = 1$

(δ) Το γράφημα της f

7. Σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης και τα γραφήματα των παρακάτων συναρτήσεων:

(α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x - y + 2$

(β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2$

(γ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -xy$

8. Σχεδιάστε τα σύνολα στάθμης με τιμή $c = 0, 1, 4, 9$ των συναρτήσεων $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Σε τι διαφέρουν τα γραφήματα της f και της g; Σε τι διαφέρουν οι τομές τους;

9. Έστω S η επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση $x^2y^6 - 2z = 3$.

(α) Βρείτε μια πραγματική συνάρτηση $f(x,y,z)$ τριών μεταβλητών και μια σταθερά c τέτοιες ώστε η S να είναι το σύνολο στάθμης της f με τιμή c.

(β) Βρείτε μια πραγματική συνάρτηση $g(x,y)$ δύο μεταβλητών τέτοια ώστε η S να είναι το γράφημα της g.

10. Περιγράψτε τη συμπεριφορά, καθώς μεταβάλλεται το c, της καμπύλης στάθμης $f(x,y) = c$ καθεμίας από τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

(β) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

(γ) $f(x,y) = x^3 - x$

11. Για τις συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 2, 3 και 4, υπολογίστε την τομή του γραφήματος που ορίζει το επίπεδο

$$S_\theta = \{(x,y,z) \mid y = x\tan\theta\}$$

για δεδομένο *σταθερό* θ. Κάντε το εκφράζοντας το z συναρτήσει του r, όπου $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Βρείτε ποιες από αυτές τις συναρτήσεις f έχουν την ιδιότητα ότι το σχήμα της τομής $S_\theta \cap$ γράφημα f είναι ανεξάρτητο του θ. (Ο Οδηγός μελέτης περιλαμβάνει τη λύση μόνο για το Παράδειγμα 3.)

Στις Ασκήσεις 10 έως 16, σχεδιάστε τις καμπύλες στάθμης (στο επίπεδο xy) της δεδομένης συνάρτησης f για τις συγκεκριμένες τιμές του c. Σχεδιάστε το γράφημα της $z = f(x, y)$.

12. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

13. $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

14. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

15. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

16. $f(x, y) = 3x - 7y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

17. $f(x, y) = x^2 + xy$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

18. $f(x, y) = x/y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$

Στις Ασκήσεις 19 έως 21, σχεδιάστε ή περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης και μια τομή του γραφήματος κάθε συνάρτησης.

19. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto -x^2 - y^2 - z^2$

20. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 9z^2$

21. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$

Στις Ασκήσεις 22 έως 26, περιγράψτε το γράφημα κάθε συνάρτησης υπολογίζοντας μερικά σύνολα στάθμης και τομές.

22. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy$

23. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + yz$

24. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + z^2$

25. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |y|$

26. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$

Σχεδιάστε ή περιγράψτε τις επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ των εξισώσεων των Ασκήσεων 27 έως 39.

27. $4x^2 + y^2 = 16$

28. $x + 2z = 4$

29. $z^2 = y^2 + 4$

30. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

31. $\frac{x}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$

32. $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{16}$

33. $z = x^2$

34. $y^2 + z^2 = 4$

35. $z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$

36. $y^2 = x^2 + z^2$

37. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$

38. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$

39. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, όπου b σταθερά

40. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, περιγράψτε τις καμπύλες στάθμης της συνάρτησης που ορίζεται από την

$$f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2) \ \text{αν} \ (x, y) \neq (0, 0) \ \text{και} \ f(0, 0) = 0.$$

41. Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την $f(r, \theta) = (\cos 2\theta)/r^2$. Σχεδιάστε μερικές καμπύλες στάθμης στο επίπεδο xy. ($\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.)

42. Δείξτε ότι στο Σχήμα 2.1.15, η «καμπύλη» στάθμης $z = 3$ αποτελείται από δύο σημεία.